



MODELOWANIE POLA AKUSTYCZNEGO METODAMI FEM I BEM

Modeling of the acoustic field by FE and BE methods

Romuald Bolejko

Instytut Telekomunikacji i Akustyki
Politechnika Wrocławska
ul. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
Romuald.Bolejko@pwr.wroc.pl

STRESZCZENIE

Metody FEM i BEM umożliwiają modelowanie pola akustycznego z określoną dokładnością w obszarach praktycznie o dowolnej geometrii. Efektywność modelowania metod zależy od typu zagadnienia oraz wielkości modelu dyskretnego. Efektywność metod BEM poza tym silnie zależy od rzędu zastosowanej kwadratury. Wybrane zagadnienia akustyczne mogą być modelowane z zastosowaniem metod FEM i BEM oraz analogii E-M-A. Umożliwia to stosowanie wybranych metod w postaci klasycznej do modelowania pola w obszarach nieograniczonych oraz znacznie zmniejsza koszty obliczeniowe metod numerycznych.

1. WPROWADZENIE

Szereg zagadnień akustycznych może być analizowany z wykorzystaniem metody elementów skończonych (FEM) i metody elementów brzegowych (BEM). W akustyce najczęściej spotyka się dwiema realizacjami metody BEM: wariacyjno-kolokacyjną DBEM (Direct BEM) i wariacyjną IBEM (Indirect BEM). Metody FEM i BEM umożliwiają modelowanie pola akustycznego w obszarach praktycznie o dowolnej geometrii i dla dowolnych warunków brzegowych. Każda z tych metod charakteryzuje się określoną efektywnością modelowania, która dla różnych zagadnień akustycznych może znacznie się różnić.

Podczas modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM analizowany obszar ciągle jest przedstawiany w postaci dyskretny przy użyciu elementów skończonych lub brzegowych. W metodzie FEM dyskretyzacji podlega cały modelowany obszar, w metodach BEM tylko jego brzeg. Model dyskretny w metodzie FEM jest więc zbudowany z większej liczby elementów dyskretnych, niż model w metodach BEM. Z tego względu panuje ogólne przekonanie, że metody BEM charakteryzują się mniejszymi kosztami obliczeniowymi, niż metoda FEM. W akustycznych zagadnieniach wewnętrznych koszty obliczeniowe metody FEM mogą być jednak znacznie mniejsze od kosztów metod BEM.

Podczas modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM można również stosować modeli numeryczne opracowane z wykorzystaniem analogii elektro-mechano-akustycznych (E-M-A). Podejście takie umożliwia znaczne uproszczenie modeli numerycznych przy jednoczesnym zachowaniu dobrej dokładności modelowania zjawisk akustycznych zachodzących w modelowanych obszarach [1].

2. EFEKTYWNOŚĆ METOD FEM I BEM

Efektywność metody numerycznej może być mierzona trzema parametrami: błędem obliczeniowym metody, kosztem obliczeń i wielkością pamięci komputerowej niezbędnej do przeprowadzenia obliczeń (pamięć obliczeniowa). Wśród błędów obliczeniowych można wyróżnić dwa główne rodzaje błędów: błędy aproksymacji zmiennych i błędy kwadratur. Koszty obliczeniowe są określone przez liczbę operacji matematycznych wykonanych przy rozwiązywaniu określonego zagadnienia. Pamięć obliczeniowa natomiast jest istotnym parametrem tylko w przypadku modelowania układów akustycznych o bardzo dużych rozmiarach.

W metodach FEM i BEM praktycznie każde zagadnienie akustyczne sprowadza się do układu równań algebraicznych:

$$[A]\{x\}=\{b\}+q. \quad (1)$$

Macierz A jest macierzą główną, x jest jednokolumnową macierzą niewiadomych, jednokolumnowa macierz b określa pobudzenia zewnętrznie działające na analizowany system, natomiast macierz q uwzględnia źródła akustyczne umieszczone w analizowanym obszarze. W metodzie FEM w równaniu (1) nie występuje macierz q .

Czas obliczeń w metodach FEM, BEM składa się z czasu niezbędnego do kompozycji układu równań, faktoryzacji macierzy głównej i eliminacji wprost/wstecz. Ponieważ macierz sztywności, masy i strat w metodzie FEM nie zależą od częstotliwości, ich kompozycja jest wykonywana tylko jeden raz na początku obliczeń. W metodzie BEM macierz główna zależy od częstotliwości, więc kompozycja macierzy głównej odbywa się dla każdej częstotliwości osobno. Analizę zagadnień akustycznych na ogół przeprowadza się w stosunkowo szerokim zakresie częstotliwości, dlatego czas przeznaczony na kompozycję układu równań w metodzie FEM można pominąć przy porównaniu kosztów obliczeń metod FEM i BEM.

Macierz główna w metodzie FEM jest symetryczna i pasmowa. Do faktoryzacji macierzy najczęściej stosuje się rozłożenie $U^T D U$ [4]. Liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas faktoryzacji i eliminacji wprost/wstecz dla macierzy A o wyrazach zespolonych (układy ze stratami) wynosi, odpowiednio, $2b_w^2 N_w$ i $8b_w N_w$, gdzie b_w jest średnią wartością połówkowej szerokości pasma macierzy głównej, N_w jest liczbą węzłów modelu dyskretnego. Na szybkość obliczeń ma duży wpływ szerokość pasma macierzy A . Szerokość pasma macierzy zależy od sposobu numeracji elementów skończonych i jest określona przez maksymalną różnicę numerów węzłów przyłączonych do tego samego elementu. Połówkowa szerokość pasma macierzy głównej b_w optymalnie zdefiniowanej siatki elementów skończonych jest o jeden rząd mniejsza od liczby węzłów N_w [1].

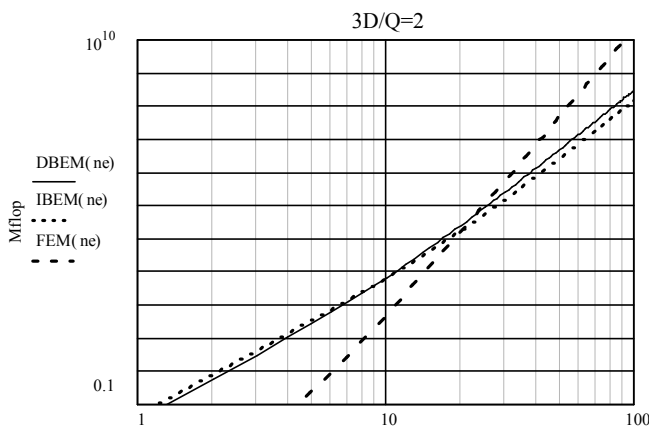
W metodzie DBEM macierz A jest macierzą o wyrazach zespolonych, niesymetryczną, pełną. Do faktoryzacji macierzy stosuje się rozłożenie LU . Liczba operacji matematycznych wykonywanych na liczbach zespolonych podczas faktoryzacji wynosi $4N_w^3/3$, podczas eliminacji wprost/wstecz $4N_w^2$ [4].

W metodzie IBEM macierz A jest macierzą o wyrazach zespolonych, pełną, lecz symetryczną. Do faktoryzacji macierzy stosuje się rozłożenie $U^T D U$. Liczba operacji

matematycznych wykonywanych na liczbach zespolonych podczas faktoryzacji macierzy głównej wynosi $2N_w^3/3$, podczas eliminacji wprost/wstecz $4N_w^2$ [4].

Na szybkość kompozycji macierzy głównej w metodach BEM ma znaczny wpływ liczba węzłów zastosowanej kwadratury [1].

Na rysunku 1 przedstawiono koszty obliczeniowe rozważanych metod jako funkcję liczby elementów liniowych przypadających na jeden wymiar modelu n_e dla modelu 3D i kwadratury rzędu drugiego. Całkowita liczba elementów dyskretnych dla modeli 3D w metodach BEM i FEM jest równa, odpowiednio, n_e^2 i n_e^3 .



Rysunek 1. Koszty obliczeniowe metod FEM i BEM dla modelu 3D zbudowanego z liniowych elementów dyskretnych i kwadratury rzędu drugiego

Na podstawie rysunku 1 można zauważyć, że koszty obliczeniowe metody IBEM są mniejsze od kosztów metody DBEM tylko dla modeli dużych (powyżej 600 elementów brzegowych), natomiast koszty obliczeniowe metody FEM są mniejsze od kosztów metod BEM dla modeli małych, średnich i dużych (poniżej 17500 elementów skończonych).

Błędy obliczeniowe metod FEM i BEM można przedstawić jako sumę błędów aproksymacji zmiennych i błędów kwadratury:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_A + \varepsilon_Q, \tag{2}$$

gdzie: ε_A – błędy aproksymacji, ε_Q – błędy kwadratury.

W metodzie FEM funkcje występujące w kwadraturach na ogół są wielomianami o niskim stopniu i już przy małych rzędach zastosowane kwadratury są dokładne. Przy analizie błędów metody FEM rozważania więc można ograniczyć do analizy błędów aproksymacji. W przypadku metody BEM błędy kwadratur często są porównywalne z błędami aproksymacji.

Analiza błędów aproksymacji zmiennych w metodach FEM i BEM dla zagadnień opartych na równaniu Helmholtza była tematem licznych prac, między innymi [2,5]. Analizie błędów kwadratur metody BEM natomiast w literaturze poświęcono bardzo mało uwagi. Na podstawie analizy błędów kwadratur dla modeli 2D występujących w metodach BEM [1] można stwierdzić, że błędy kwadratury są pomijalnie małe przy spełnieniu następującego kryterium: przy dużych odległościach węzeł-element: $Q > m$ i przy odległościach węzeł-element porównywalnych z długością elementu h : $Q > m+2$, gdzie Q jest rzędem kwadratury, m jest stopniem wielomianu bazowego (funkcji kształtu). Wyznaczone kryteria można stosować zarówno w procesie kompozycji macierzy głównej, jak i przy

obliczeniach parametrów pola akustycznego na podstawie rozkładu prędkości i ciśnienia akustycznego na brzegu modelowanego obszaru.

3. MODELOWANIE OBSZARÓW NIEOGRANICZONYCH

Pole akustyczne w obszarach nieograniczonych na ogół jest modelowane metodą BEM, rzadziej FEM. W metodzie FEM obszar nieograniczony zastępuje się odpowiednio dużym obszarem ograniczonym na brzegu którego nakładany jest warunek brzegowy zapewniający całkowite pochłanianie fali akustycznej. Ponieważ w przypadku metody BEM dyskretyzacji podlega wyłącznie brzeg modelowanego obszaru metoda ta na ogół jest efektywniejsza, niż metoda FEM. Istnieje jednak odmiana metody FEM w której są stosowane tzw. elementy nieskończone [3] umożliwiające analizę pola nieograniczonego bez konieczności dyskretyzacji całego modelowanego obszaru. Koszty obliczeniowe metody FEM można również zmniejszyć wykorzystując pewne zależności uzyskane z zastosowaniem analogii E-M-A. Przykładem takiego wykorzystania analogii E-M-A może być model głośnika w obudowie zamkniętej umożliwiający wyznaczenie charakterystyki promieniowania zestawu poprzez obliczenie impedancji obciążającej tylną stronę głośnika [1].

4. PODSUMOWANIE

Metody FEM i BEM umożliwiają modelowanie pola akustycznego w obszarach praktycznie o dowolnej geometrii z określoną dokładnością.

Efektywność modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM zależy od rozmiaru modelu dyskretnego i zastosowanych algorytmów obliczeniowych. W metodach BEM silny wpływ na wyniki i czas modelowania mają również kwadratury. Stosując opracowane kryteria można zminimalizować błędy kwadratur oraz oszacować wpływ rzędu kwadratur na koszty obliczeniowe.

Podczas modelowania obszarów ograniczonych efektywność metody FEM może być większa od efektywności metod BEM. Dla obszarów trójwymiarowych metoda FEM jest szybsza od BEM dla modeli zbudowanych nawet z kilkudziesięciu tysięcy liniowych elementów skończonych. Podczas modelowania obszarów nieograniczonych efektywność metody FEM można również zwiększyć wykorzystując modele uproszczone opracowane z zastosowaniem analogii E-M-A.

LITERATURA

1. R. BOLEJKO, Modelowanie numeryczne pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz obszarów ograniczonych z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych, Praca Doktorska PWr., Wrocław, 2004.
2. A. BRAŃSKI, Analiza akustycznych zagadnień brzegowych, WSP, Rzeszów, 2001.
3. O. ESTORFF, Boundary elements in acoustics, WIT Press, Southampton, 2000.
4. R. A. HORN, C. R. JOHNSON, Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
5. E. Stain, W. Wendland, Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view, Courses and Lectures No.301, Springer-Verlag, Wien-New York, 1988.