



**ANALIZA ROZWIĄZANIA AKUSTYCZNEGO ZAGADNIENIA  
BRZEGOWEGO WYPROWADZONEGO METODĄ BEM**

**Analysis of the solution  
of the acoustic boundary problem derived with the BEM\***

**Adam Brański**

Katedra Mechaniki Konstrukcji, Politechnika Rzeszowska, W. Pola 2, 35-959 Rzeszów  
[abranski@prz.rzeszow.pl](mailto:abranski@prz.rzeszow.pl)

**STRESZCZENIE**

Podano klasyfikację rozwiązań klasycznie sformułowanego akustycznego zagadnienia brzegowego (równanie różniczkowe Helmholtza + warunek brzegowy Neumanna). Następnie znaleziono rozwiązanie tego zagadnienia, ale sformułowanego w postaci całkowej (całka Helmholtza-Huygensa (H-H) + równanie całkowe brzegowe (BIE)); rozwiązanie to znaleziono metodą BEM (boundary elements method). Przeanalizowano rozwiązanie otrzymane metodą BEM w odniesieniu do podanej klasyfikacji rozwiązań. Z rozważań wynika, że metoda BEM należy do metod mieszanych.

**1. WPROWADZENIE**

Ścisłe rozwiązanie akustycznego zagadnienia brzegowego można sformułować w postaci całki H–H. Takie rozwiązanie można otrzymać tylko dla szczególnych zagadnień brzegowych, patrz np. [12] s.496. Dla większości zagadnień osiągalne jest tylko przybliżone rozwiązanie. Tak jest dlatego, że do obliczenia całki H–H należy znać na brzegu prędkość drgań oraz ciśnienie akustyczne. Jedną z tych wielkości zadaje się (zgodnie z warunkami zagadnienia). Druga jest zależna od pierwszej, a związane są równaniem całkowym brzegowym (BIE); a więc druga wielkość jest rozwiązaniem BIE. W rzeczywistych zagadnieniach BIE można rozwiązać tylko metodami przybliżonymi, np. BEM. Zmusza to do zapisania wielkości danej w postaci funkcji interpolującej, ściślej z wielkością daną tylko w węzłach, a przybliżoną poza nimi. Druga wielkość brzegowa, jako rozwiązanie BIE, jest przybliżona zarówno w węzłach jak i poza nimi. Skutkiem przybliżeń wielkości na brzegu jest przybliżone rozwiązanie zagadnienia w obszarze wyrażone całką H–H. Celem pracy jest analiza tego rozwiązania na tle klasyfikacji rozwiązań klasycznie sformułowanego zagadnienia brzegowego.

## 2. KLASYCZNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Niech w obszarze  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  ograniczonym powierzchnią  $S$  będzie dane zagadnienie brzegowe opisane równaniem Helmholtza i warunkiem brzegowym

$$L(u) = \nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad u = u(r) \in \Omega \quad (1)$$

$$D^1(u) = u' = \hat{u}' = \hat{v}, \quad u' = u'(Q) \in S \quad (2)$$

gdzie  $u$  – potencjał prędkości [12] s.278; ciśnienie akustyczne jest funkcją potencjału prędkości,  $k$  – kątowna liczba falowa,  $r = |P - Q|$ ,  $P \in \Omega$ ,  $Q \in S$ ,  $D^1(u)$  – operator różniczkowy [7] s.58,  $u' = \partial u / \partial n$ ,  $n \perp S$  w  $Q$ ,  $\hat{v}$  – dana prędkość drgań.

## 3. ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE, METODY ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Niech  $u$  będzie pewnym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (1), (2). Jeżeli  $u(r)$  spełnia (1), to  $L(u) = 0$ . Jeżeli  $u'(Q)$  spełnia warunek brzegowy (2), to  $u' - \hat{v} = 0$ . Takie rozwiązanie  $u$  nazywa się rozwiązaniem ścisłym. W praktyce znalezienie ścisłego rozwiązania jest niemożliwe. Osiągalne jest rozwiązanie przybliżone  $\tilde{u}$ , ale wówczas

$$R_L = L(\tilde{u}) \neq 0, \quad \tilde{u} = \tilde{u}(r) \in \Omega \quad (3)$$

$$R_D = \tilde{u}' - \hat{v} \neq 0, \quad \tilde{u}' = \tilde{u}'(Q) \in S \quad (4)$$

Funkcje  $R_L$ ,  $R_D$  nazywają się funkcjami błędu (residuum) rozwiązania zagadnienia, odpowiednio w obszarze  $\Omega$  i na brzegu obszaru  $S$  [2] s.21. W praktyce szuka się takiego rozwiązania  $\tilde{u}$ , aby był spełniony jeden z poniższych warunków

•  $R_L = 0$ ,  $R_D \neq 0$  – metoda brzegowa,

•  $R_L \neq 0$ ,  $R_D = 0$  – metoda wewnętrzna,

•  $R_L \neq 0$ ,  $R_D \neq 0$  – metoda mieszana.

Wynika stąd, że wymagania nałożone na  $\tilde{u}$  generują metody rozwiązania zagadnienia brzegowego w sformułowaniu klasycznym i odwrotnie.

Problemem jest znalezienie  $\tilde{u}$ ; jedną z metod jest metoda minimalizacji błędu [4] s.37. Jej szczególną postacią jest metoda residuów ważonych [2] s.22, [3] s.20. W metodzie tej szuka się takiego rozwiązania przybliżonego  $\tilde{u}$ , które spełnia (1) lub / oraz (2) w sensie całek ważonych.

Jest też inna możliwość rozwiązania zagadnienia brzegowego. Wymaga to jednak całkowego sformułowania zagadnienia.

#### 4. CAŁKOWE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Ścisłe rozwiązanie (1) przedstawia się w postaci całki H–H [12] s.489. Uwzględniając w całce H–H warunek (2) otrzymamy się

$$u(r) = \int_S (u w^{*'} - \hat{v} w^*) dS \quad (5)$$

gdzie  $w^* = w^*(r)$  – rozwiązanie podstawowe równania (1) obliczone z równania  $L(w^*) = \delta$ ,  $\delta$  – delta Diraca; w akustyce  $w^*(r)$  jest potencjałem prędkości źródła punkowego umieszczonego w swobodnej przestrzeni.

W całce (5) nieznanne jest  $u(Q)$ . Między  $u(Q)$  i  $\hat{v}(Q)$  istnieje związek; jest nim BIE. Równanie to wyprowadza się z całki H–H, gdy  $\Omega \ni P \rightarrow P_s \in S$  [12] r.23, [6] s.39,

$$\theta(P_s) u(P_s) = \int_S (u w^{*'} - \hat{v} w^*) dS \quad (6)$$

gdzie  $\theta(P_s)$  – zewnętrzny kąt bryłowy określony przez powierzchnię brzegową w ustalonym punkcie  $P_s$ .

#### 5. ROZWIĄZANIE BIE METODĄ BEM

Rozwiązanie równania (6) jest równoznaczne ze znalezieniem funkcji  $u(Q)$ . Istnieje wiele ścisłych i przybliżonych metod rozwiązywania równań całkowych [8], [9], [11], [12], [5], [10]. Praktyczne znaczenie mają tylko metody przybliżone; ich klasyfikację, związek między nimi podano w [1]. Największe znaczenie wśród metod przybliżonych ma BEM.

W BEM brzeg  $S$  dzieli się na elementy  $S_j$ ,  $S = \bigcup_j S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_j$ . Wówczas dana funkcja  $\hat{v}(Q)$  oraz szukana  $u(Q)$  podlegają dyskretyzacji,  $\hat{v}(Q) = \bigcup_j \hat{v}_j(Q)$ ,  $u(Q) = \bigcup_j u_j(Q)$ . Ponieważ po lewej stronie równania całkowego jest wartość dyskretna  $u(P_s)$ , więc zarówno  $\hat{v}(Q)$  jak i  $u(Q)$  należy przedstawić również za pomocą wartości dyskretnych. Do tego celu wykorzystuje się teorię interpolacji Lagrange'a. Dodatkowo funkcje interpolujące należy dobrać tak, aby współczynniki interpolacji były równe wartościom w węzłach, odpowiednio danej i szukanej funkcji. Taki warunek spełniają np. wielomiany Serendipa [3], [2]. Nie wyróżniając indeksem „j” wartości dyskretnych na  $j$ -elemente można napisać

$$\tilde{\hat{v}}_j(Q) = \sum_i \hat{v}_i N_i \quad (7)$$

$$\tilde{u}_j(Q) = \sum_i u_i N_i \quad (8)$$

gdzie  $u_i = u_j(P_i)$ ,  $\hat{v}_i = \hat{v}_j(P_i)$ .

Podstawiając (7), (8) do (6) otrzymuje się układ równań algebraicznych, z którego oblicza się  $u_i$ . Należy zauważyć, że w (7) dane dyskretne  $\hat{v}_i$  są ściśle, ale funkcja  $\tilde{v}_j(Q)$  poza węzłami jest przybliżona. Natomiast w (8) dyskretne wartości  $u_i$  są szukane, a jako rozwiązanie równania całkowego (6) będą przybliżone  $\tilde{u}_i$ , a więc funkcja  $\tilde{u}_j(Q)$  będzie przybliżona na całym j-elemente.

Kolejnym krokiem BEM jest obliczenie  $u(r)$  według wzoru (5). Ponieważ  $u(Q)$  jest dostępna tylko w postaci (8), więc wygodnie jest przedstawić całkę (5) również w postaci dyskretnej. Podstawiając (7) i (8) do (5) formalnie można napisać

$$\tilde{u}(r) = \sum_j \int_{s_j} \left( \sum_i (\tilde{u}_i w^{*i} - \hat{v}_i w^{*i}) N_i \right) dS \quad (9)$$

Ze względu na wzory (7) i (8) rozwiązanie zagadnienia w obszarze  $\tilde{u}(r)$  jest przybliżone.

## 5. UWAGI, WNIOSKI

Z rozważań wynikają następujące uwagi i wnioski:

1. Metoda BEM wymaga dyskretnych wartości warunku brzegowego. W tym celu warunek brzegowy przedstawia się w postaci funkcji interpolującej. Funkcja taka jest zbieżna z daną funkcją tylko w węzłach, natomiast między węzłami jest obciążona pewnym błędem. A więc, funkcja interpolująca warunek brzegowy (7) jest przybliżona i nie spełnia warunku (2).
2. Przybliżony warunek brzegowy jest uwzględniany w BIE, a to m. i. wymusza przybliżone rozwiązanie BIE, tzn. przybliżoną szukaną funkcję (8) na brzegu obszaru.
3. W celu obliczenia wartości funkcji w obszarze, zarówno przybliżony warunek brzegowy (7) jak i przybliżoną funkcję na brzegu (8) uwzględnia się w całce H-H (5). Ze względu na przybliżony charakter funkcji podcałkowej, wartość tej całki w każdym punkcie obszaru też jest przybliżona. A więc rozwiązanie zagadnienia nie spełnia warunku (1).
4. Z rozważań wynika, że rozwiązanie otrzymane metodą BEM nie spełnia w sposób ścisły ani warunku brzegowego, ani równania różniczkowego. Stąd wniosek, że metoda BEM należy do metod mieszanych rozwiązywania zagadnień brzegowych.

## LITERATURA

1. A. BRAŃSKI, The relation of the BEM to other numerical methods, wysłane do Engineering Analysis with Boundary Elements.
2. C.A. BREBBIA, J. DOMINGUEZ, Boundary elements, An introductory course, Comp. Mech. Publ., McGraw-Hill Book Company, Southampton, 1992.
3. T. BURCZYŃSKI, Metoda elementów brzegowych w mechanice, WNT, Warszawa, 1995.
4. L. COLLATZ, Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa, 1960.
5. R. DAUTRAY, J.L. LIONS, Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Vol. 4 Integral equations and numerical methods. Berlin: Springer, 2000.
6. A. KARAFIAT, Analiza metody elementów brzegowych w zadaniu rozpraszania fali akustycznej, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Monografia 204, Kraków, 1996.
7. H. MARCINKOWSKA, Wstęp do teorii równań różniczkowych, PWN, Warszawa, 1986.
8. S.G. MICHLIN, C.L. SMOLICKI, Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, PWN, Warszawa, 1972
9. A. PISKOREK, Równania całkowe, WNT, Warszawa, 1971.
10. A.D. POLYAMIN, A.V. MANZHIROV, Handbook of integral equations. New York: CRC Press, 1998.
11. W. POGORZELSKI, Równania całkowe i ich zastosowania, PWN, Warszawa, tom I – 1953.
12. E. SKUDRZYK, The foundations of acoustics, Springer - Verlag, Wien - New York, 1971.
13. I. WOLSKA-BOCHENEK, A. BORZYMOWSKI, J. HMAJ, M. TRYJARSKA, Zarys teorii równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych, PWN, Warszawa, 1984.