LI OTWARTE SEMINARIUM Z AKUSTYKI
Gdańsk – Sobieszewo, 6–10.09.2004

KIEDY JEST MOŻLIWY PRZEPŁYW ENERGII MIĘDZY ŹRÓDŁAMI AKUSTYCZNYMI

Conditions allowing for energy flow between two acoustic sources

Henryk Idczak, Anna Snakowska*

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław,
e-mail: henryk.idczak@pwr.wroc.pl
*Instytut Fizyki, Uniwersytet Rzeszowski
ul. Rejtana 16A, 35-310 Rzeszów,
e-mail: asnak@ atena.univ.rzeszow.pl

STRESZCZENIE

W pracy dokonano analizy mocy akustycznej promieniowanej przez układ dwóch koherentnych źródeł quasi-punktowych. Do analizy przyjęto, że jest to układ dwóch otworów w nieskończonej odgrodzie, na którą pada harmoniczna fala płaska pod dowolnym kątem $\boldsymbol{\alpha}$. Jako parametr układu przyjęto stosunek $\boldsymbol{d/\lambda}$, gdzie $\boldsymbol{d}$ jest odległością między otworami, natomiast $\boldsymbol{\lambda}$ długością fali padającej na odgrodę. Przy założeniu, że powierzchnia jednego z otworów jest stała, moc akustyczna promieniowana przez każdy otwór jest funkcją dwóch niezależnych zmiennych: kata padania fali $\boldsymbol{\alpha}$, czyli różnicy faz z jakimi promieniują otwory i stosunku powierzchni otworów. Zanalizowano warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremów lokalnych i absolutnych takiej funkcji i na tej podstawie wyznaczono parametry układu, dla których jeden z otworów staje się odbiornikiem energii (zlewem).

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Na odgrodę, nieskończenie sztywną i dużą w porównaniu z długością fali $\boldsymbol{\lambda}$, pada harmoniczna fala płaska pod kątem $\boldsymbol{\alpha} \in [-\pi/2, \pi/2]$. W odgrodzie znajdują się dwa kołowe otwory w odległości $\boldsymbol{d}$, które stanowią układ dwóch koherentnych źródeł quasi-punktowych.

Zakładamy, że dla ustalonej powierzchni otworu 2, $\boldsymbol{S_2}$ = const., moc akustyczna promieniowana przez źródło 2, gdy źródło 1 nie promieniuje, jest stała $\boldsymbol{W_{02}}$ = const. Przyjmując jako parametr układu stosunek $\boldsymbol{d/\lambda} > 0$, moce akustyczne źródeł 1 i 2, gdy oba źródła promieniują jednocześnie, są równe [1]:

$$W_1 = W_{01} + \sqrt{W_{01}W_{02}}\,\frac{\sin\left(kd + \varphi_2 - \varphi_1\right)}{kd}, \tag{1}$$

$$W_2 = W_{02} + \sqrt{W_{01}W_{02}}\,\frac{\sin\left(kd + \varphi_1 - \varphi_2\right)}{kd}, \tag{2}$$

gdzie $k = 2\pi/\lambda$ jest liczbą falową.
Całkowita moc akustyczna promieniowana przez układ jest zatem równa:

(3) $$W = W_1 + W_2 = W_{01} + W_{02} + 2\sqrt{W_{01}W_{02}}\,\frac{\sin kd}{kd}\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Różnicę faz początkowych φ_1 i φ_2 z jakimi promieniują otwory w odgrodzie możemy zapisać jako

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -kd\sin\alpha = -xkd, \quad x = \sin\alpha .$$

Oznaczając dalej stosunek mocy akustycznych źródeł 1 i 2, gdy źródła promieniują oddzielnie (czyli stosunek powierzchni otworów), przez

$$A = \frac{S_1}{S_2} = \frac{W_{01}}{W_{02}},$$

moce akustyczne wg (1), (2) i (3) można zapisać jako funkcje dwóch zmiennych A oraz x:

(4) $$f(A,x) = \frac{W_1}{W_{02}} = A + \sqrt{A}\,\frac{\sin kd(1-x)}{kd}.$$

(5) $$g(A,x) = \frac{W_2}{W_{02}} = 1 + \sqrt{A}\,\frac{\sin kd(1+x)}{kd},$$

(6) $$h(A,x) = \frac{W}{W_{02}} = 1 + A + 2\sqrt{A}\,\frac{\sin kd}{kd}\cos kdx .$$

Pytamy się jaki powinien być stosunek powierzchni otworów A oraz kąt padania $\alpha = \arcsin(x)$ harmonicznej fali płaskiej na odgrodę, aby dla danego kd jedno ze źródeł było odbiornikiem energii akustycznej (zlewem), czyli aby jednym otworem energia wypływała a drugim wpływała. Interesuje nas również jaka jest minimalna moc akustyczna promieniowana przez układ dwóch otworów w odgrodzie.

2. ROZWIAZANIE PROBLEMU

2.1. Moc akustyczna źródła 1

Dla założeń przyjętych w punkcie 1 rozwiązanie tak sformułowanego problemu polega na znalezieniu minimum absolutnego funkcji $f(A, x)$ wg (4) w obszarze D

$$D : A > 0, \ -1 \le x \le 1 .$$

*<u>Warunkiem koniecznym</u>, aby funkcja **f(x, y)** różniczkowalna w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ miała w tym punkcie ekstremum lokalne jest, aby pierwsze pochodne cząstkowe funkcji w tym punkcie były równe zeru, tj.* $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

*<u>Warunkiem wystarczającym</u> aby funkcja **f(x,y)** posiadająca ciągłe drugie pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$, posiadała w tym punkcie ekstremum lokalne jest*

1^0 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$,

2^0 $F(x_0, y_0) = f''_x(x_0, y_0)\cdot f''_y(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$,

przy czym, gdy $f''_x(x_0, y_0) > 0$ - jest minimum lokalne, gdy $f''_x(x_0, y_0) < 0$ - jest maksimum lokalne.
Jeśli $F(x_0, y_0) < 0$, to funkcja nie ma ekstremum, natomiast jeśli $F(x_0, y_0) = 0$, wtedy jest to tzw. przypadek wątpliwy wymagający dodatkowych badań [3].

Najpierw wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji ***f(A, x)*** wg (4). Z warunku koniecznego 1^0 znajdujemy punkt $P_{10}(A_{10}, x_{10})$ o współrzędnych:

$$(7)\ \sqrt{A_{10}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)}{2kd},\quad x_{10} = 1 - \frac{\pi(2n+1)}{2kd},\quad n = 1,3,\ldots,\mathrm{int}\left[\frac{2kd}{\pi} - \frac{1}{2}\right],\quad kd \geq \frac{3}{4}\pi$$

Następnie obliczamy wg 2^0 $F(A_{10}, x_{10}) = (kd)^2$. Ponieważ $F(A_{10}, x_{10}) > 0$ i $f''_A(A_{10}, x_{10}) > 0$, zatem w punkcie $P_{10}(A_{10}, x_{10})$ istnieje lokalne minimum funkcji ***f(A, x)***.
Na koniec badamy ekstrema funkcji ***f(A, x)*** na brzegach obszaru ***D*** dla $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$.
Z przeprowadzonej analizy wynika, że na brzegu obszaru ***D*** w punkcie $P_{12}(A_{12}, x_2)$ o współrzędnych:

$$\sqrt{A_{12}} = -\frac{\sin 2kd}{2kd},\quad x_2 = -1,\quad \text{dla } (m - 1/2)\pi < kd < m\pi,\quad m = 1,2,\ldots,$$

istnieje minimum funkcji ***f(A, x)***. Dla znalezienia minimum absolutnego w obszarze ***D*** należy porównać wartości funkcji ***f(A, x)*** w punktach $P_{10}(A_{10}, x_{10})$ i $P_{12}(A_{12}, x_2)$. Ponieważ różnica

$$f(A_{12}, x_2) - f(A_{10}, x_{10}) = \frac{1 - \sin^2 2kd}{(2kd)^2} \geq 0,$$

jest zawsze dodatnia, zatem minimum absolutne jest w punkcie $P_{10}(A_{10}, x_{10})$ wg (7) i jest jednocześnie minimum lokalnym.
Końcowy rezultat tej części analizy można zapisać w postaci:

$$\min_D f(A, x) = f(A_{10}, x_{10}) = -\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)}{2kd}\right)^2,\quad n = 1,3,\ldots,\mathrm{int}\left[\frac{2kd}{\pi} - \frac{1}{2}\right],\quad kd \geq \frac{3}{4}\pi.$$

Na podstawie (4) minimalna moc akustyczna źródła 1 w punkcie $P_{10}(A_{10}, x_{10})$ wg (7) jest ujemna i równa:

$$(8)\qquad W_{1\min} = -\frac{W_{02}}{(2kd)^2}.$$

2.2. Moc akustyczna źródła 2

Należy teraz rozważyć jak zmienia się moc akustyczna źródła 2, jeżeli W_{02} = const., tj. należy zbadać ekstrema funkcji ***g(A, x)*** wg (5) w obszarze ***D*** i na jego brzegach. Postępując podobnie jak w pkt. 2.1 znajdujemy ekstrema lokalne funkcji ***g(A, x)*** na prostej $P_{20}(A, x_{20})$:

$$(9)\qquad A > 0,\quad x_{20} = \frac{\pi(2n+1)}{2kd} - 1,\quad \text{dla } n = 0,1,2,\ldots,\mathrm{int}\left[\frac{2kd}{\pi} - \frac{1}{2}\right],\quad kd \geq \pi/4.$$

Jak wynika z (7) i (9) $x_{20} = - x_{10}$ Ekstrema lokalne funkcji $g(A, x)$ są jednocześnie ekstremami absolutnymi, bowiem na brzegach obszaru D, dla $x_1 = 1$ oraz $x_2 = -1$ funkcja ta nie posiada ekstremów.
Na podstawie (5) moc akustyczna promieniowana przez otwór 2 na prostej $P_{20}(A, x_{20})$ wg (9) ma postać:

$$W_2 = W_{02}\left(1+\sqrt{A}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)}{kd}\right), \tag{10}$$

przy czym dla n parzystych są to maksima, a dla n nieparzystych minima mocy.
Aby układ był realizowalny musi być spełniony warunek: $r_1 + r_2 = \left(1+\sqrt{A}\right)r_2 < d$, gdzie r_1, r_2 są promieniami otworów kołowych. Stąd wynika ograniczenie od góry dla możliwych wartości A: $0 < \sqrt{A} < \frac{d}{r_2} - 1$. Dla $\sqrt{A} > kd$ i n = 1, 3, ... moc akustyczna źródła 2 będzie ujemna.

2.3. Całkowita moc akustyczna układu źródeł 1 i 2

Na koniec, przy tych samych założeniach jak w punkcie 1, należy w podobny sposób zanalizować ekstrema funkcji $h(A, x)$ wg (6).
Z warunku koniecznego istnienia ekstremum 1^0 wyznaczamy punkt $P_0(A_0, x_0)$, o współrzędnych:

$$\sqrt{A_0} = -\frac{\sin kd}{kd}\cos kdx_0,\quad x_0 = \frac{n\pi}{kd},\quad n = 1,2,\ldots,\mathrm{int}\left[\frac{kd}{\pi}\right],\quad kd > n\pi, \tag{11}$$

w którym istnieje minimum lokalne funkcji $h(A,x)$, bowiem z warunku dostatecznego 2^0 otrzymujemy $F(A_0, x_0) = (kd)^2 > 0$ i $h''_A(A_0, x_0) = 2(\sin kd \cos kdx_0)^2 > 0$. W punktach na brzegach obszaru D $P_1(A_1, x_1)$ i $P_2(A_2, x_2)$ o współrzędnych:

$$\sqrt{A_1} = \sqrt{A_2} = -\frac{\sin 2kd}{2kd},\quad x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad \text{dla}\quad (m - 1/2)\pi < kd < m\pi,\quad m = 1,2,\ldots,$$

istnieją minima funkcji $h(A, x)$, równe

$$h(A_1, x_1) = h(A_2, x_2) = 1 - \left(\frac{\sin 2kd}{2kd}\right)^2.$$

Z porównania wartości funkcji $h(A, x)$ w punktach $P_0(A_0, x_0)$ oraz $P_1(A_1, x_1)$ i $P_2(A_2, x_2)$ dostajemy

$$h(A_1, x_1) - h(A_0, x_0) = \frac{\sin^4 kd}{kd^2} \geq 0.$$

Zatem minimum lokalne funkcji $h(A, x)$ w punkcie $P_0(A_0, x_0)$ jest jednocześnie minimum absolutnym:

$$\min_D h(A, x) = h(A_0, x_0) = 1 - \left(\frac{\sin kd}{kd}\right)^2.$$

Całkowita moc akustyczna promieniowana przez układ wg (6), w punkcie $P_0(A_0, x_0)$ wg (11), jest minimalna i równa:

$$W_{\min} = W_{02}\left(1-\left(\frac{\sin kd}{kd}\right)^2\right). \tag{12}$$

3. PRZYKŁADOWE OBLICZENIA

3.1. Minimum mocy akustycznej źródła 1

Obliczenia zaczynamy od wyboru wartości kd. Najmniejsza wartości kd dla której moc W_1 osiąga swoje minimum absolutne jest wg (7) równa kd = 3π/4, d/λ = 3/8. Dla tej wartości kd, $int[2kd/\pi - ½]$ = 1, czyli dalsze obliczenia należy przeprowadzić dla n = 1. Ze wzoru (7) współrzędne punktu minimum absolutnego $P_{10}(A_{10}, x_{10})$ są równe: $\sqrt{A_{10}}$ = 2/3π, x_0 = -1 (α = - $\pi/2$). Zakładając, że częstotliwość harmonicznej fali płaskiej padającej na przegrodę jest równa f = 1 kHz, odległość między otworami wynosi d = 129 m. Stosunek powierzchni otworów jest proporcjonalny do mocy akustycznych promieniowanych przez te otwory, gdy promieniują one oddzielnie, zatem $A = S_1/S_2$ = 4/9π^2. Jeżeli są to otwory kołowe, to stosunek ich promieni jest równy $r_1/r_2 = \sqrt{A_{10}}$ = 2/3π. Ponieważ założyliśmy, że W_{02} = const., więc należy również przyjąć, że r_2 = const., przy czym aby otwory nie zachodziły na siebie musi być spełniony warunek: $d > r_1 + r_2$, stąd $r_2 < \dfrac{3c}{8f\left(1+\sqrt{A_{10}}\right)}$ = 106.4 mm, gdzie prędkość dźwięku w powietrzu c = 344 m/s. Jeżeli przyjąć np. r_2 = 40 mm, to r_1 = 8.5 mm. Dla takiej geometrii układu moce akustyczne promieniowane przez otwory 1 i 2 są, wg (4) i (5), odpowiednio równe $W_1 = -(2/3\pi)^2 W_{02}$, $W_2 = W_{02}$, a całkowita moc akustyczna wynosi $W = W_1 + W_2 = \left(1-(2/3\pi)^2\right)W_{02}$. Zatem dla f = 1 kHz i kąta padania α = - $\pi/2$ układ taki będzie promieniował moc akustyczną o 0.2 dB mniejszą niż otwór 2.

3.2. Minimum mocy akustycznej źródła 2

Dokonując podobnych obliczeń dla tych samych wartości kd = 3π/4, n = 1, f = 1 kHz i r_2 = 40 mm dla punktu $P_{20}(A, x_{20})$ wg (9), w którym moc akustyczna źródła 2 osiąga swoje minimum absolutne, otrzymamy: x_{20} = 1 (α_{20} = $\pi/2$), $\sqrt{A} < \dfrac{3c}{8fr_2} - 1 = 2.225$. Przyjmując $\sqrt{A}$ = 2, dostajemy: r_1 = 80 mm, W_1 = A W_{02}, $W_2 = \left(1-\sqrt{A}/kd\right)W_{02}$, $W = \left(1 + A - \sqrt{A}/kd\right)W_{02}$ Dodanie otworu 1 o promieniu r_1 = 2 r_2 zwiększa całkowitą moc akustyczną promieniowaną przez układ otworów zaledwie o 0.18 dB względem W_1.

3.3. Minimum całkowitej mocy akustycznej źródła 1 i 2

Wartość $\boldsymbol{kd}$ wybieramy z najmniejszego przedziału $2\pi < \boldsymbol{kd} < 3\pi$,w którym istnieje punkt krytyczny P_0 wg (11). Przyjmując $\boldsymbol{kd} = 5\pi/2$, $int[\boldsymbol{kd}/\pi] = 2$, zatem $\boldsymbol{n} = 1, 2$. Dalszych obliczeń dokonujemy tylko dla $\boldsymbol{n} = 1$, bowiem dla $\boldsymbol{n} = 2$, $\sqrt{\boldsymbol{A}_0} < 0$ i układ nie jest realizowalny. Współrzędne punktu P_0: $\sqrt{\boldsymbol{A}_0} = 2/5\pi$, $\boldsymbol{x_0} = 2/5$ ($\boldsymbol{\alpha_0} = 23.6^{o}$). Dla $\boldsymbol{f}$ = 1kHz, $\boldsymbol{d}$ = 430 mm. Warunek $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2}$ jest spełniony, gdy przyjmiemy tak jak poprzednio $\boldsymbol{r_2} = 40$ mm, wtedy $\boldsymbol{r_1} = 5.1$ mm. Dla takiej geometrii układu moce akustyczne promieniowane przez otwory 1 i 2, wg (4) i (5), są w punkcie P_0 wg (11), odpowiednio równe $\boldsymbol{W}_1 = 0$, $\boldsymbol{W}_2 = (1 - 2/5\boldsymbol{\pi})^2 \boldsymbol{W}_{02}$, a minimalna całkowita moc akustyczna układu wg (12) $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_2$. Tak więc dodanie otworu 1 zmniejsza całkowitą moc akustyczną układ o 1.18 dB względem $\boldsymbol{W_{02}}$.

3. WNIOSKI KOŃCOWE

W wyniku wzajemnego oddziaływania źródeł składowych jakimi są otwory w odgrodzie na którą pada harmoniczna fala płaska, moc akustyczna jednego z nich może być ujemna. Wyprowadzone zależności (7) i (9) określają warunki układu dla których jedno ze źródeł staje się „zlewem”, tzn. zamiast promieniować energię akustyczną staje się jej odbiornikiem, natomiast zależności (8) i (10) określają maksymalną moc akustyczną jaką może „pobrać” takie źródło. Dość nieoczekiwanym wynikiem analizy numerycznej jest to, że całkowita moc akustyczna układu dwóch otworów może być o 1.18 dB mniejsza do mocy akustycznej promieniowanej przez pojedynczy otwór.
Problemem do rozwiązania jest zanalizowanie symetrii układu względem $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{x}$, a także wyznaczenie minimum absolutnego mocy akustycznej układu $\boldsymbol{N}$ otworów, dla $\boldsymbol{N} > 2$.

LITERATURA

1. H. IDCZAK, A. SNAKOWSKA, Warunki równoważności układów dwóch koherentnych źródeł punktowych. Prace XLVIII OSA, ss. 51-56, Wrocław 2001.
2. E. SKUDRZYK, Foundations of Acoustics. Springer-Verlag, Wien 1971.
3. Poradnik matematyczny. Wydanie II, PWN, Warszawa 1980