



**SPRĘŻENIE POMIĘDZY MODAMI WŁASNYMI POMIESZCZENIA
I JEGO WPLYW NA ROZKŁAD CIŚNIENIA AKUSTYCZNEGO
W STANIE USTALONYM**

**Coupling between room eigenmodes and its influence
on acoustic pressure distribution in steady state**

Mirosław Meissner

Institut Podstawowych Problemów Techniki PAN
00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21
E-mail: mmeissn@ippt.gov.pl

STRESZCZENIE

Zastosowanie metody modów własnych w akustyce wnętrz prowadzi do układu równań liniowych, w których występują współczynniki sprzężenia pomiędzy modami. W zagadnieniach praktycznych najczęściej wprowadza się założenie, że sprzężenie pomiędzy modami jest pomijalnie małe. W pracy przeanalizowano słuszność tego założenia dla pomieszczenia o złożonym kształcie składającego się z dwóch pomieszczeń prostopadłościennych sprzężonych akustycznie. Rozwiązanie układu równań w przypadku sprzężenia pomiędzy modami uzyskano stosując metodę iteracyjną. Wyniki obliczeń pokazały, że efektem sprzężenia jest znaczna modyfikacja amplitudy składowych czasowych dla części modów własnych, co prowadzi do istotnych zmian w rozkładzie amplitudy ciśnienia akustycznego w stanie ustalonym.

1. WPROWADZENIE

Analiza modalna znalazła szerokie zastosowanie w mechanice, wibroakustyce oraz akustyce struktur. W przypadku akustyki wnętrz wykorzystanie metody modów własnych ograniczone jest do małych częstotliwości dźwięku, przy których długość fali jest porównywalna z wymiarami pomieszczenia [1]. W tym zakresie częstotliwości stosowane najczęściej w budownictwie materiały mają mały współczynnik pochłaniania, dlatego rozkład ciśnienia akustycznego w pomieszczeniu w stanie ustalonym charakteryzuje się dużą nierównomiernością i silnie zależy od częstotliwości dźwięku.

Jeżeli funkcje $\Phi_n(\mathbf{r})$, gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, tworzą dla pomieszczenia zbiór unormowanych funkcji własnych to w przypadku harmonicznego źródła dźwięku rozwiązanie równania falowego dla stanu ustalonego można zapisać w postaci

$$p = V^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \Phi_n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2)P_n + 2j\omega \sum_{m=0}^{\infty} r_{mn}P_m = Q_n, \quad (2)$$

gdzie $p_n(t) = P_n \exp(j\omega t)$ to składowe czasowe ciśnienia dla kolejnych modów, V to objętość pomieszczenia, ω_n to częstotliwości własne oraz

$$r_{mn} = 0.5\rho c^2 \int_S \Phi_m \Phi_n / Z ds, \quad Q_n = c^2 / V^{1/2} \int_V q(\mathbf{r}) \Phi_n(\mathbf{r}) dv, \quad (3a,b)$$

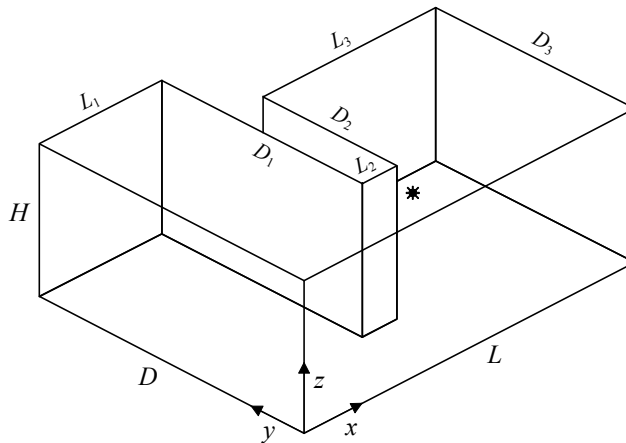
gdzie ρ to gęstość powietrza, c to prędkość dźwięku, Z to impedancja powierzchniowa ścian pomieszczenia dla prostopadłego padania fali akustycznej, S to powierzchnia ścian oraz $q(\mathbf{r})$ to funkcja określająca rozkład przestrzenny źródła. Zależności (2) tworzą układ równań liniowych, w których współczynniki r_{mn} dla $m \neq n$ noszą nazwę współczynników sprzężenia pomiędzy modami [2]. Jeżeli przez \bar{P}_n oznaczymy rozwiązanie rów. (2) przy założeniu braku sprzężenia pomiędzy modami ($r_{mn} = 0$ dla $m \neq n$) to na podstawie (2) uzyskuje się

$$P_n = \bar{P}_n \left(1 - 2j\omega \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn} r_{mn} P_m}{Q_n} \right), \quad (4)$$

gdzie $\chi_{mn} = 0$ dla $m = n$ i $\chi_{mn} = 1$ dla $m \neq n$ oraz $\bar{P}_n = Q_n / (\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\omega r_{nn})$. Gdy materiał na ścianach pomieszczenia ma mały współczynnik pochłaniania, a więc $\Re(Z) / \rho c \gg 1$, to układ modów własnych jest słabo sprzężony. W takim przypadku do rozwiązania układu równań (4) można zastosować metodę iteracyjną [3]. Rozwiązanie pierwszego rzędu otrzymuje się podstawiając w miejsce P_m amplitudę \bar{P}_m składowej czasowej przy założeniu braku sprzężenia pomiędzy modami. W ten sposób uzyskuje się

$$P_n = \bar{P}_n \left(1 - 2j\omega \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn} r_{mn} Q_m / Q_n}{\omega_m^2 - \omega^2 + 2j\omega r_{mm}} \right). \quad (5)$$

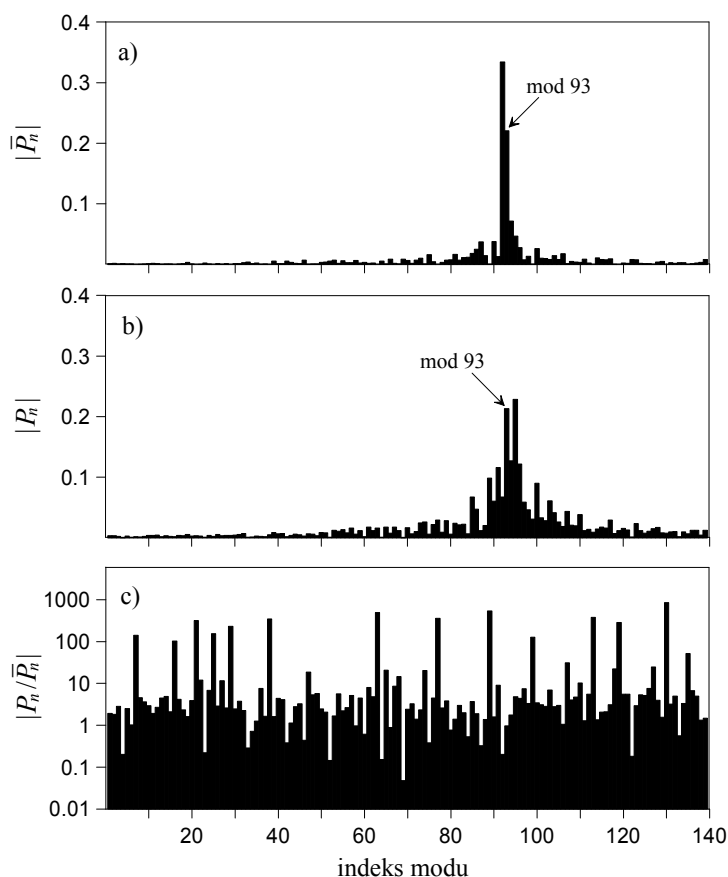
Jak wynika z rów. (5), modyfikacja amplitudy składowej czasowej n -tego modu może być znaczna, gdy częstotliwość źródła dźwięku ω jest równa częstotliwości własnej ω_n .



Rys. 1. Analizowane pomieszczenie o złożonym kształcie. Symbol określa położenie źródła dźwięku.

2. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

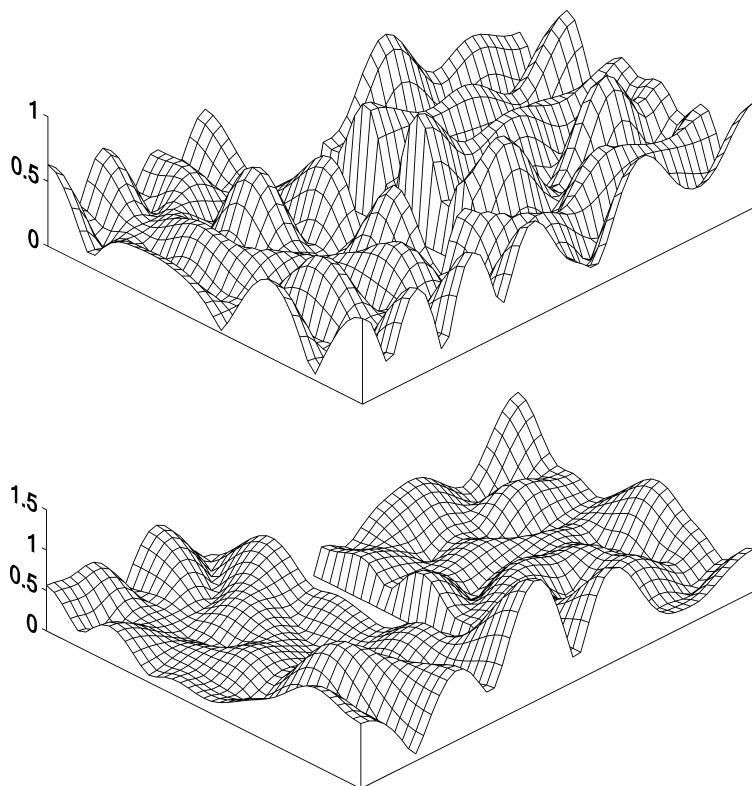
Obliczenia amplitudy ciśnienia akustycznego w stanie ustalonym przeprowadzono dla pomieszczenia z rys. 1 o wymiarach: $L = 10$, $L_1 = 4$, $L_2 = 1$, $L_3 = 5$, $D = 8$, $D_1 = D_3 = 6$, $D_2 = 4$, $H = 3$ i harmonicznego źródła dźwięku położonego w punkcie $x = 8$, $y = 4$, $z = 1$ (wszystkie wymiary w metrach). Funkcje i częstotliwości własne wyznaczono numerycznie za pomocą programu EIGEN, gdzie zastosowano algorytm różnicowy oraz metodę wymuszenia harmonicznego [4]. W obliczeniach wykorzystano 140 pierwszych modów własnych o częstotliwościach z zakresu 0–170 Hz.



Rys. 2. Moduł amplitud $|\bar{P}_n|$ i $|P_n|$ oraz stosunek $|P_n/\bar{P}_n|$. Częstotliwość źródła dźwięku $f = 141,7$ Hz.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń ilustrujące wpływ sprzężenia pomiędzy modami własnymi na amplitudy składowych czasowych kolejnych modów. Dane te uzyskano dla materiału pochłaniającego o impedancji powierzchniowej $Z/\rho c = 30$ umieszczonego na ścianach bocznych pomieszczenia i częstotliwości źródła dźwięku $f = 141,7$ Hz równej częstotliwości własnej modu 93-go. Jak widać na rys. 2c, stosunek $|P_n/\bar{P}_n|$ zmienia się w szerokim zakresie od 0,002 do 850, a więc rezultatem sprzężenia

między modami jest znaczna modyfikacja amplitudy składowych czasowych. Co ważniejsze, w analizowanym przypadku modyfikacja ta powoduje również zmianę układu dominujących modów. W warunkach bez sprzężenia są to mody 92-gi i 93-ci (rys. 2a), natomiast przy uwzględnieniu sprzężenia są to mody 93-ci i 95-ty (rys. 2b). Ponieważ postać funkcji własnych Φ_n jest inna dla każdego modu, więc efektem sprzężenia pomiędzy modami jest zmiana rozkładu amplitudy ciśnienia akustycznego w stanie ustalonym (rys. 3).



Rys. 3. Rozkład amplitudy ciśnienia akustycznego w stanie ustalonym dla częstotliwości źródła dźwięku $f = 141,7$ Hz w przypadku pominięcia (rysunek górny) i uwzględnienia (rysunek dolny) sprzężenia pomiędzy modami własnymi. Płaszczyzna obserwacji $z = 1,8$ m. Na osi rzędnych ciśnienie w paskalach.

LITERATURA

1. L. FRANZONI, E. DOWELL, On the accuracy of modal analysis in systems with damping, *JASA*, **97**, 687-690 (1995).
2. L. FRANZONI, D. BLISS, A discussion of modal uncoupling and an approximate closed-form solution for weakly coupled systems with application to acoustics, *JASA*, **103**, 1923-1932 (1998).
3. E. DOWELL, Reverberation time, absorption, and impedance, *JASA*, **64**, 181-191 (1978).
4. Y. HOBIKI, K. YAKUBO, T. NAKAYAMA, Spectral characteristics in resonators with fractal boundaries, *Physical Review E*, **54**, 1997-2004 (1996).